6 - المتتاليات العددية

I - مبدأ الإستدلال بالتراجع

P_n خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n.

إذا كانت الخاصية P_0 صحيحة و من أجل كل عدد طبيعي n، P_n يستلزم P_{n+1}

فإن من أجل كل عدد طبيعي n، P_n صحيحة.

• كيفية البرهان بالتراجع

للبرهان بالتراجع على أن خاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n نتبع المراحل التالية :

1 • نتحقق أن P_0 صحيحة.

2 • نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة.

3 • نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n، P_n صحيحة.

ملاحظة : يمكن أن تكون الخاصية P_n معرفة من أجل $n \geq n_0$.

في هذه الحالة، نتحقق أن P_{n_0} صحيحة و نفرض أن P_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي n حيث $n \geq n_0$، و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة.

ثم نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، P_n صحيحة.

II - المتتاليات العددية

1• توليد متتالية

1 • 1 • يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بحدها العام.

مثال : (v_n) متتالية معرفة بحدها العام $v_n = n + 3$

للحصول على حد معين يكفي تعويض n بالعدد الطبيعي المناسب.

لدينا $v_{10} = 10 + 3 = 13$ ؛ $v_{27} = 27 + 3 = 30$

1 • 2 • يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n).

مثال : المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = u_n + 2$

هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لدينا $u_1 = 4$ ؛ $u_2 = 6$ ؛ $u_3 = 8$ ؛ $u_4 = 10$.

ملاحظة 1 : في المتتالية (v_n) ، v_{27} هو أحد حدودها، 27 هو دليله،

أما رتبته فهي متعلقة بعدد الحدود التي تسبقه.

رتبة الحد v_k بالنسبة إلى الحد v_b حيث $b < k$ هي $b - k + 1$.

رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_0 هي $27 - 0 + 1$ أي 28.

رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_1 هي $27 - 1 + 1$ أي 27.

رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_5 هي $27 - 5 + 1$ أي 23.

ملاحظة 2 : المتتالية (v_n) المعرفة بحدها العام $v_n = n + 3$ هي من الشكل $v_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) و المعرفة كما يلي $f(x) = x + 3$.

المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2$ هي من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و المعرفة كما يلي : $f(x) = x + 2$.

1 • 3 • المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

المتاليات الحسابية	المتاليات الهندسية
تعريف : (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = u_n + r$. r يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n).	تعريف : (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = qu_n$. q يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n).
الحد العام لمتتالية حسابية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r. الحد العام u_n معرف كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = u_0 + nr$.	الحد العام لمتتالية هندسية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q الحد العام u_n معرف كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = u_0 \times q^n$.
حساب المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n\left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right)$ حيث n هو عدد حدود المجموع S. ملاحظة : يمكن كتابة المجموع S على الشكل التالي : $S = nu_0 + \frac{n(n-1)r}{2}$	حساب المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q. • إذا كان $q = 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = nu_0$ • إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ حيث n هو عدد حدود المجموع S.
ملاحظة : إذا كان $r = 1$ فإن كل حدود المتتالية الحسابية مساوية للحد u_0.	ملاحظة : • إذا كان $q = 1$ فإن كل حدود المتتالية الهندسية مساوية للحد u_0. • إذا كان $q = 0$ فإن كل الحدود بدءا من u_1 منعدمة. • إذا كان $q = -1$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $\|u_n\| = \|u_0\|$.

2. خواص المتتاليات

2. 1. اتجاه تغير متتالية عددية

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- (u_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = u_n$.
- إذا كانت (u_n) متزايدة أو متناقصة نقول إنها رتيبة.

ملاحظة 1 : ندرس بنفس الطريقة اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا كانت معرفة على جزء من $\mathbb{N}$.

ملاحظة 2 : نستنتج اتجاه تغير متتالية حسابية (u_n) حسب إشارة أساسها r.

$r>0$	$r<0$	$r=0$
(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) ثابتة

و نستنتج اتجاه تغير متتالية هندسية (u_n) حسب إشارة حدها الأول u_0 و قيمة أساسها q.

	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$u_0>0$	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) ثابتة	(u_n) متزايدة تماما
$u_0<0$	(u_n) متزايدة تماما		(u_n) متناقصة تماما

- إذا كان $q<0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ليست رتيبة.
- إذا كان $q=0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ثابتة بدءا من u_1.

2. 2. المتتاليات المحدودة

تعاريف

(u_n) متتالية عددية.

- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M حيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \leq M$.
- المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي m حيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \geq m$.
- المتتالية (u_n) محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.

2 . 3 . نهاية متتالية عددية

(u_n) متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي.

تعريف

العدد الحقيقي ℓ هو نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل مجال $]\alpha ; \beta[$ يوجد عدد طبيعي p بحيث مهما يكن العدد الطبيعي n يحقق $n \geq p$ ؛ u_n ينتمي إلى المجال $]\alpha ; \beta[$. نكتب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

ملاحظات

- إذا كانت نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ عددا حقيقيا ℓ نقول إن (u_n) متقاربة.
- إذا كانت نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$ أو غير موجودة فإن (u_n) غير متقاربة و نقول عنها إنها متباعدة.

مبرهنة

إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

2 . 4 . مبرهنات حول نهايات متتاليات

مبرهنة

(u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال $[\alpha ; +\infty[$.
α عدد حقيقي. ℓ هو عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.
إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال I و $\ell \in I$ ؛ (u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$
و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \in I$.
إذا كانت (u_n) متقاربة نحو ℓ و f مستمرة عند ℓ فإن $\ell = f(\ell)$.

المبرهنات المتعلقة بحساب نهايات متتاليات

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان ؛ ℓ و ℓ' عددان حقيقيان.

- نهاية مجموع متتاليتن

إذا كانت $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ هي	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ هي	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$ هي	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم تعيين

• نهاية جداء متتاليتن

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ هي	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ هي	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$ هي	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم تعيين

• نهاية حاصل قسمة متتاليتن

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ هي	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ هي	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	∞
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ هي	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم تعيين

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ هي	$\ell' > 0$ أو $+\infty$	$\ell' > 0$ أو $+\infty$	$\ell' < 0$ أو $-\infty$	$\ell' < 0$ أو $-\infty$	0
و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ هي	0 بقيم موجبة	0 بقيم سالبة	0 بقيم موجبة	0 بقيم سالبة	0
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ هي	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم تعيين

ملاحظة : توجد حالات، لا يمكن النص فيها عن النتيجة بتطبيق المبرهنات المتعلقة بمجموع متتاليتين، أو جداء متتاليتين أو حاصل قسمة متتاليتين. تسمى حالات عدم التعيين و هي من الشكل

$+\infty - \infty$ ؛ $0 \times \infty$ ؛ $\frac{0}{0}$ ؛ $\frac{\infty}{\infty}$.

2 . 5 . النتائج المتعلقة بالحصر و المقارنة

مبرهنة 1

• إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

• إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

مبرهنة 2

• إذا كانت متتالية متقاربة فإنها محدودة.

ملاحظة : العكس غير صحيح.

مبرهنة 3

(u_n) ، (v_n) ، (w_n) متتاليات عددية، ℓ عدد حقيقي.

إذا كان (بدءا من مرتبة معينة)	و كان ...	فإن ...
$u_n \le w_n$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$
$v_n \le u_n$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$\lvert v_n - \ell \rvert \le u_n$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$
$v_n \le u_n \le w_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$	$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

2 • 6 • نهاية متتالية هندسية

مبرهنة

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q.

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- إذا كان $q \le -1$ فإن نهاية (u_n) غير موجودة.

ملاحظات

- إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و غير محدودة من الأعلى فإنها متباعدة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و غير محدودة من الأسفل فإنها متباعدة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

III - المتتاليتان المتجاورتان

تعريف

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان.

نقول عن المتتاليتين (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

إحدى المتتاليتين متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

مبرهنة 1

إذا كانت متتاليتان متجاورتين فكل منهما متقاربة و لهما نفس النهاية.

مبرهنة 2

(u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان و نهايتهما ℓ.

إذا كانت (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \le \ell \le v_n$.

إذا كانت (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n \le \ell \le u_n$.

1 اثبات خاصية بالتراجع

تمرين 1

(u_n) متتالية معرفة كما يلي $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

• أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 2$.

حل

• لتكن P_n الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $0 < u_n < 2$.

• $u_0 = 1$ إذن $0 < u_0 < 2$. بالتالي P_0 صحيحة.

• ليكن n عددا طبيعيا. نفرض أن P_n صحيحة أي $0 < u_n < 2$.

نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $0 < u_{n+1} < 2$.

لدينا $0 < u_n < 2$. إذن $2 < u_n + 2 < 4$.

ينتج أن $\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 2} < 2$. و بالتالي $0 < \sqrt{u_n + 2} < 2$.

نستنتج أن $0 < u_{n+1} < 2$. أي P_{n+1} صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، إذا كانت P_n صحيحة فإن P_{n+1} صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ؛ P_n صحيحة.

• ينتج أن من أجل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 2$.

تمرين 2

• أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ؛ $n! \geq 2^{n-1}$

علما أن $1! = 1$ و من أجل $n \geq 2$ ؛ $n! = n(n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.

حل

P_n هي الخاصية المعرفة من أجل $n \geq 1$ كما يلي : $n! \geq 2^{n-1}$.

• لدينا من أجل $n = 1$ ؛ $2^{1-1} = 2^0 = 1$ و $1! = 1$. إذن $1! \geq 2^{1-1}$ أي P_1 صحيحة.

• ليكن n عددا طبيعيا حيث $n \geq 1$. نفرض أن P_n صحيحة أي $n! \geq 2^{n-1}$.

نبرهن أن P_{n+1} صحيحة ؛ أي $(n+1)! \geq 2^n$.

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ؛ $n + 1 \geq 2$.

لدينا $n! \geq 2^{n-1}$ و $n + 1 \geq 2$ إذن $(n+1)\,n! \geq 2^{n-1} \times 2$ أي $(n+1)! \geq 2^n$.

و بالتالي P_{n+1} صحيحة.

نستنتج أن من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، إذا كانت P_n صحيحة فإن P_{n+1} صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، P_n صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ؛ $n! \geq 2^{n-1}$

تمرين 3

• أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

حل

نثبت ذلك بالتراجع.

• نضع P_n الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

• لدينا من أجل $n=1$ ؛ $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

إذن من أجل $n=1$ ؛ $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}$ و بالتالي P_1 صحيحة.

• ليكن n عددا طبيعيا حيث $n \geq 1$ نفرض أن P_n صحيحة

أي من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ ؛ $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

• حسب الفرض لدينا $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

ينتج أن $\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

لدينا $\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

و بالتالي $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

إذن من أجل العدد الطبيعي $n \geq 1$ إذا كان $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

فإن $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

2 استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك و نهاية متتالية عددية

تمرين 1

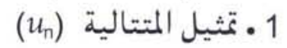
• مثل بيانيا كلا من المتتاليات (u_n) المعرفة كما يلي :

1. $u_0=0$ و $u_{n+1}=2u_n+1$
2. $u_0=0$ و $u_{n+1}=u_n^2+1$
3. $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3+u_n}{u_n}$

استعمل تمثيل كل منها لتخمين سلوكها و نهايتها.

حل

• المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$. (Δ) هو المستقيم الذي معادلته $y = x$.



1 • تمثيل المتتالية (u_n)

حيث $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي :

$f(x) = 2x + 1$ و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني.

مجموعة النقط $M_n(u_n ; u_{n+1})$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n).

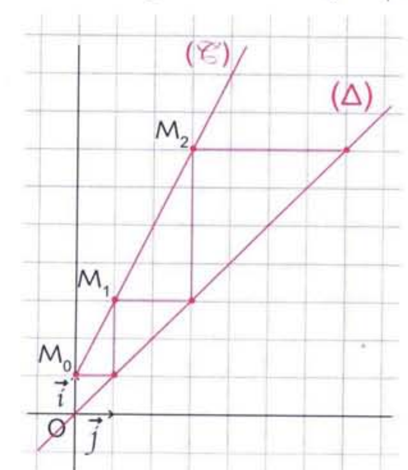
النقط $M_0(u_0 ; u_1)$ ، $M_1(u_1 ; u_2)$ ، $M_2(u_2 ; u_3)$ ، ...

هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية.

$(\mathscr{C})$ هو المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$.

النقط M_0 ، M_1 ، M_2 ، ... هي نقط من هذا المستقيم.

التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



2 • تمثيل المتتالية (u_n) حيث $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و $(\mathscr{C})$ التمثيل البياني

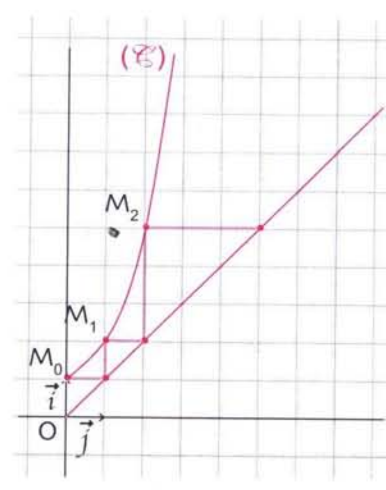
للدالة f المعرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = x^2 + 1$.

النقط $M_0(u_0 ; u_1)$ ، $M_1(u_1 ; u_2)$ ، $M_2(u_2 ; u_3)$ ، ...

نقط من التمثيل البياني للمتتالية (u_n).

المنحنى $(\mathscr{C})$ و هو فرع لقطع مكافئ يشمل النقط M_0 ، M_1 ، M_2 ، ...

التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



3 • تمثيل المتتالية (u_n) حيث $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3 + u_n}{u_n}$.

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و $(\mathscr{C})$ هو التمثيل البياني

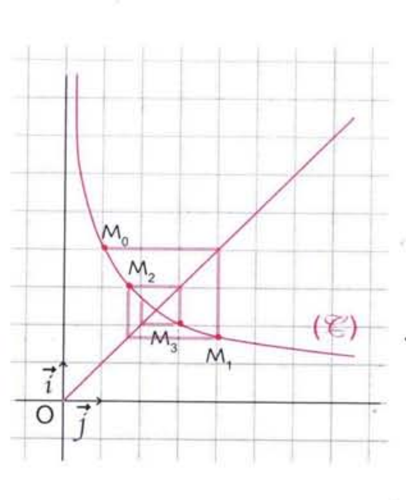
للدالة f المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{3 + x}{x}$.

M_0 ، M_1 ، M_2 ، ... هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية (u_n).

المنحني $(\mathscr{C})$ يشمل النقط M_0 ، M_1 ، M_2 ، ... و هو فرع قطع زائد.

التخمين : المتتالية (u_n) ليست رتيبة. المتتالية (u_n) متقاربة

و نهايتها هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع $(\mathscr{C})$.



3 دراسة سلوك و نهاية متتالية

تمرين 1

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي $u_{n+1} = \dfrac{n+3}{2n-1}$

1 • برهن أن المتتالية (u_n) محدودة.

2 • حدد اتجاه تغيراتها ثمّ عين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل

1 • المتتالية (u_n) معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي f' حيث $f'(x) = \dfrac{-7}{(2x-1)^2}$.

لدينا $f'(x) < 0$ على المجال $]1 ; +\infty[$ و بالتالي f متناقصة على $]1 ; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي :

x	1 $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	4 ↘ $\frac{1}{2}$

من جدول تغيرات f ينتج أن على المجال $]1 ; +\infty[$

$\frac{1}{2} \le f(x) \le 4$. و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم

$\frac{1}{2} \le u_n \le 4$

أي المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ و من الأعلى بالعدد 4.

2 • الدالة f متناقصة على المجال $]1 ; +\infty[$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم $f(n+1) \le f(n)$. أي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $u_{n+1} \le u_n$

و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \frac{1}{2}$. إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

تمرين 2

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - 3$

1 • لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = u_n + k$ ؛ $k \in \mathbb{R}$.

عين k بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية. حدد عندئذ أساسها و حدها الأول.

2 • عبر عن v_n و u_n بدلالة n.

3 • عين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل

1 • من المساواة $v_n = u_n + k$ ينتج أن $u_n = v_n - k$. **تعيين** v_{n+1} بدلالة v_n.

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + k = \left(\frac{u_n}{2} - 3\right) + k = \frac{1}{2}(v_n - k) - 3 + k = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$.

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان $\frac{1}{2}k - 3 = 0$ أي $k = 6$.

و بالتالي من أجل $k = 6$ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول v_0

حيث $v_0 = u_0 + 6$ أي $v_0 = 13$.

1 • (v_n) متتالية هندسية إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

أي من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = 13\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = 13\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$.

3 • لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -6$.

تمرين 3

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \frac{\sin n + (-1)^n}{n}$

1 • أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة.

2 • أدرس اتجاه تغير (u_n) ثمّ عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

حل

1 • نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ، $-1 \le \sin n \le 1$ و $-1 \le (-1)^n \le 1$.

إذن $-2 \le \sin n + (-1)^n \le 2$ ينتج أن $-\frac{2}{n} \le \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \le \frac{2}{n}$.

بما أن $n \ge 1$ فأن $0 < \frac{1}{n} \le 1$ و $0 < \frac{2}{n} \le 2$ و $-2 \le -\frac{2}{n} < 0$.

و بالتالي $-2 \le -\frac{2}{n} \le \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \le \frac{2}{n} \le 2$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $-2 \le u_n \le 2$. ينتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 و من الأسفل بالعدد 2-. إذن المتتالية (u_n) محدودة.

2 • من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $-1 \le \sin n \le 1$ و $-1 + (-1)^n \le \sin n + (-1)^n \le 1 + (-1)^n$

إذا كان n زوجيا فإن $n + 1$ فردي و بالتالي $0 \le u_n \le \frac{2}{n}$ و $-\frac{2}{n} \le u_{n+1} \le 0$.

إذا كان n فرديا فإن $n + 1$ زوجي و بالتالي $-\frac{2}{n} \le u_n \le 0$ و $0 \le u_{n+1} \le \frac{2}{n}$.

ينتج أن إذا كان n زوجيا فإن $u_{n+1} \leq u_n$.

إذا كان n فرديا فإن $u_{n+1} \geq u_n$.

و بالتالي (u_n) ليست متزايدة و ليست متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

أي المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}^*$.

• بما أن $-\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4 معرفة و استعمال مفهوم المتتاليتين المتجاورتين

تمرين 1

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -\frac{1}{n+1}$ و $v_n = \frac{5}{2n+3}$.

• هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-n-1+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$.

إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} - u_n > 0$

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n).

لدينا $v_{n+1} - v_n = \frac{5}{2n+2+3} - \frac{5}{2n+3} = \frac{10n+15-10n-25}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)}$.

إذن $v_{n+1} - v_n = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)}$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} - v_n < 0$

و بالتالي المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

• حساب $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n)$.

لدينا $v_n - u_n = \frac{7n+8}{(2n+3)(n+1)} = \frac{7n+8}{2n^2+5n+3}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{7n+8}{2n^2+5n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{2n} = 0$ إذن $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

لدينا (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$،

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

تمرين 2

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n = \frac{n}{n+2}$.

• أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$.

إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$. نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} - u_n > 0$

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n).

لدينا $v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$.

إذن $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$ نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} - v_n > 0$

و بالتالي المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) لهما نفس اتجاه التغير إذن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

تمرين 3

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1 • بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

2 • عين حصرا لنهايتهما من أجل $n = 8$.

حل

1 • دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لدينا $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$

• حساب $u_{n+1} - u_n$

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$. إذن من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$؛ $u_{n+1} - u_n > 0$

ينتج أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$.

• حساب $v_{n+1} - v_n$

لدينا $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$ ؛ $\frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$.

إذن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$ و $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

فأن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

2 • بما أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان فإن كلا منهما متقاربة و لهما نفس النهاية ℓ

التي تحقق من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ ؛ $u_n \leq \ell \leq v_n$.

لنحصل على الحصر التالي حسب قيم العدد الطبيعي n من $\mathbb{N}^*$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ ؛ $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$

تعيين حصر من أجل n = 8 لنهاية (u_n) باستعمال المتباينة المضعّفة $u_n \leq \ell \leq v_n$

و قيم العدد الحقيقي $\frac{1}{n!}$.

لدينا $1 \leq 1 \leq 1$

$1 \leq \frac{1}{1!} \leq 1$

$0,5 \leq \frac{1}{2!} \leq 0,5$

$0,1666666 \leq \frac{1}{3!} \leq 0,16666667$

$0,0416666 \leq \frac{1}{4!} \leq 0,0416667$

$0,0083333 \leq \frac{1}{5!} \leq 0,0083334$

$0,0013888 \leq \frac{1}{6!} \leq 0,0013889$

$0,0001984 \leq \frac{1}{7!} \leq 0,0001985$

$0,0000248 \leq \frac{1}{8!} \leq 0,0000249$

بالجمع طرف لطرف نجد $2,7182785 \leq \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \leq 2,7182791$

أي $2,7182785 \leq \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k!} \leq 2,7182791$

و بالتالي $2,7182785 \leq u_n \leq 2,7182791$ من أجل n = 8.

ينتج أن $2,7182785 \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq 2,7182791$

إذن $2,7182785 \leq \ell \leq 2,7182791$.

ملاحظة : يمكن تعيين حصر للعدد ℓ من أجل n أكبر، و تقريب ℓ من e أساس اللوغاريتم النيبيري.

مسألة

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$

1 • احسب الحدود u_1، u_2، u_3.

2 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $u_n > 0$.

3 • أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

4 • أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

5 • احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل

1 • حساب u_1، u_2، u_3.

لدينا $u_0 = -1$ ؛ $u_1 = \dfrac{3 + 2u_0}{2 + u_0} = \dfrac{3 - 2}{2 - 1} = 1$ أي $u_1 = 1$.

$u_2 = \dfrac{3 + 2}{2 + 1} = \dfrac{5}{3}$ أي $u_2 = \dfrac{5}{3}$.

$u_3 = \dfrac{3 + \frac{10}{3}}{2 + \frac{5}{3}} = \dfrac{19}{11}$ أي $u_3 = \dfrac{19}{11}$.

2 • نبرهن أن من أجل كل عدد n طبيعي غير منعدم ؛ $u_n > 0$.

من أجل ذلك نطبق الإستدلال بالتراجع.

لتكن P_n الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n > 0$.

من أجل $n = 1$ ؛ $u_1 = 1$. إذن $u_1 > 0$

إذن الخاصية P_n صحيحة من أجل $n = 1$.

نفرض أن P_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي غير المنعدم n ؛ أي $u_n > 0$

نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $u_{n+1} > 0$.

نعلم أن $u_n > 0$. إذن $3 + 2u_n > 0$ و $2 + u_n > 0$. و بالتالي $\dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n} > 0$.

ينتج أن $u_{n+1} > 0$ أي P_{n+1} صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم n ؛ P_n صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $u_n > 0$.

3 • إثبات أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

من أجل ذلك نثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \leq \sqrt{3}$.

نضع P'_n الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n \leq \sqrt{3}$.

من أجل $n = 0$ ؛ $-1 \leq \sqrt{3}$ إذن $u_0 \leq \sqrt{3}$ أي P'_n صحيحة من أجل $n = 0$.

إذن الخاصية P'_n صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن P'_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي n و نبرهن أن P'_{n+1} صحيحة أي $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$.

لدينا $$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - \sqrt{3} = \frac{(3 - 2\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})u_n}{2 + u_n} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{2 + u_n}$$

نعلم أن $2 - \sqrt{3} > 0$ و $u_n - \sqrt{3} \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ إذن $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$

و بالتالي $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$. نستنتج أن P'_n صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \leq \sqrt{3}$.

4 • دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n).

ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$. $$u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{2 + u_n}$$

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $u_n > 0$ و $u_n \leq \sqrt{3}$

إذن من أجل كل عد طبيعي n غير منعدم ؛ $\frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} \geq 0$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

من أجل $n = 0$ ؛ لدينا $u_1 - u_0 = 1 - (-1) = 2$ أي $u_1 - u_0 = 2$ إذن $u_1 - u_0 > 2$.

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

5 • حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

نعلم أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$ ، إذن (u_n) متقاربة.

الدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) هي الدالة المستمرة على $]0 ; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

نضع $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم ؛ $u_n > 0$.

نبحث عن ℓ في المجال $]0 ; +\infty[$ حيث $\ell = f(\ell)$.

لدينا $\ell = f(\ell)$ يعني $\ell = \frac{3 + 2\ell}{2 + \ell}$. أي $\ell^2 = 3$. ينتج أن $\ell = \sqrt{3}$. إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

الاستدلال بالتراجع

1 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:
$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$
1 • برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي
$0 < u_n < 3$.
2 • برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

2 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:
$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
1 • برهن أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$ ؛ $u_n < 2$.
2 • برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :
$u_0 = 9$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$
1 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n > 3$.
2 • برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

4 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :
$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$
برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = 3 - 2^n$

5 (u_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي :
$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{4 + u_n}$
1 • أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛
$0 \leq u_n \leq 1$.
2 • ما هو اتجاه تغير الدالة $x \longmapsto \dfrac{1 + x}{4 + x}$
على المجال $[0 ; 1]$ ؟
3 • ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

6 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $4^n - 1$ مضاعف 3.

7 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n
$7 \times 3^{5n} + 4$ يقبل القسمة على 11.

8 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n
$4^n - 3n - 1$ يقبل القسمة على 9.

9 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n
$n^3 - n$ يقبل القسمة على 3.

10 a عدد حقيقي موجب تماما. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(1+a)^n \geq 1 + na$.

11 ليكن العدد S_n حيث
$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$
برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

12 ليكن العدد S_n حيث
$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$
برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n
$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

توليد متتاليات

13 (u_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي:
$u_0 = 1$ ؛ $u_1 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$
• عبر عن u_n بدلالة n.
• ادرس سلوك المتتالية (u_n).
• في التمارين 14، 15، 16، 17 يطلب تمثيل المتتالية (u_n) و تخمين سلوكها و تعيين نهايتها إن وجدت.

14 $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 1 - 2u_n$

15 $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n}$

16 $u_0 = \dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

17 $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

خواص المتتاليات

18 ادرس إن كانت المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل أو من الأعلى أو محدودة في كل من الحالات التالية :

1. $u_n = \frac{n+2}{n}$
2. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$
3. $u_n = \frac{n+3}{2n-1}$

19 نفس السؤال بالنسبة إلى المتتاليات (u_n) التالية:

1. $u_n = \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$
3. $u_n = 4^n - 3^n$

20 برهن أن المتتالية المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{7}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$ محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{3}{4}$.

21 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_n = \frac{n+1}{n}$ و $v_n = -n$

22 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين الهندسيتين (u_n) و (v_n) بعد تعيين حدها الأول (من أجل n = 0)

$u_n = 2^{n-1}$ و $v_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

23 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي

$u_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$ و $v_n = (-2)^{n-1}$

24 (u_n) هي متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. برهن أن (u_n) متناقصة.
2. أثبت أن (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها ؟

25 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليات الهندسية (u_n) التالية علما أن حدها الأول u_0 و أساسها q.

1. $u_0 = -2$ و $q = \frac{1}{3}$.
2. $u_0 = \frac{2}{3}$ و $q = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

26 ادرس اتجاه تغير المتتالية الهندسية (v_n) التالية علم حدها الأول v_0 و أساسها q.

1. $v_0 = 1$ و $q = 2$.
2. $v_0 = -1$ و $q = -3$.

27 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

1. $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{n+7}$.
2. $v_0 = 8$ و $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 1}$.

28 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_n = 1 + n + \sin n$$

1. أحصر (u_n) بمتتاليتين حسابيتين (v_n) و (w_n).
2. استنتج نهاية (u_n) لما يؤول n إلى $+\infty$.

29 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$u_n = \frac{n^4}{n!}$$

ادرس اتجاه تغير (u_n) و نهايتها إن وجدت.

30 (u_n) متتالية معرفة كما يلي :

$u_0 = 2$ و $2u_n = u_{n+1} + 1$.

1. برهن أن المتتالية (v_n) المعرفة بحدها العام $v_n = u_n - 1$ هي متتالية هندسية.
2. عبر عن u_n بدلالة n.
3. ادرس نهاية (u_n).

31 (u_n) متتالية معرفة كما يلي :

$u_0 = 3$ و $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} - 4$.

1. ادرس اتجاه تغير هذه المتتالية.
2. (v_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي : $v_n = u_n + 6$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية. عين v_n بدلالة n.
3. ما هي نهاية (u_n) ؟

المتتاليتان المتجاورتان

32 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$

كما يلي : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n = \frac{2n+7}{n+2}$.

أثبت أن (u_n) و (v_n) متجاورتان و عين نهايتهما.

33 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$

كما يلي : $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$ و $v_n = \frac{3n^2+4}{n^2+1}$.

أثبت أن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

34 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$

كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

35 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$

كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

مسائل

36 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 1$ و $u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 5$.

1 • عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية.

2 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4 • استنتج عبارة u_n بدلالة n.

5 • هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

37 نعرف المتتالية (u_n) بحدها الأول $u_0 = 0$

و علاقة التراجع التالية $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$

1 • احسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3.

2 • لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2 ; +\infty[$

كما يلي $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة 2cm).

أ) • ارسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

ب) • استعمل المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathscr{C})$ لتمثيل النقط من محور الفواصل التي فواصلها هي u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3.

جـ) • ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية (u_n) ؟

3 • برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

4 • أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 2$

5 • احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

38 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$

كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2} \end{cases}$

1 • احسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3.

2 • نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{3x-2}$

ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 1cm).

(Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

أ) • ارسم (Δ) و $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

ب) • باستعمال المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathscr{C})$ ، عين النقط من $(\mathscr{C})$ التي فواصلها u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3.

جـ) • ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية (u_n) ؟

3 • أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

4 • أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة.

5 • استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

6 • احسب نهاية المتتالية (u_n).